tradition of social privilege and political oppression. The Eurasians have come too late, to deny all that and to defend this tradition. They themselves agree that it will never return. They are also right in their assertion that the Russian revolution is „not a savage and senseless revolt", but „a profound and essential process", which „opens the way to sound principles of state building". Their mistake was only to misconceive the passing stage of the revolution for its definite result.

To conclude, I must say a few words about the fate of the Eurasian doctrine. It enjoyed a good initial success as it struck the chord which sounded loud in the hearts of the young generation. One had the feeling of taking a personal part in a battle of giants. One wistfully looked for a world conflagration. And then, everybody could find in the new doctrine what he wished to find: universal religion or narrow nationalism, a realistic view of the present or a utopian construction of the future, a defense of the old regime or a justification of Bolshevism. Very soon, however, this multiformity and its inherent contradictions proved fatal to the unity of the party. An advanced group of it in Paris started a daily paper („Eurasia") where the defense of the Soviet Russia came too much to the forefront. The other members living in remoter parts of Europe — they were the initiators of Eurasianism — recoiled to the starting point of the doctrine, which was principally religious and tratidional, and they excommunicated the rebells (January, 1929). Since that time selfconceited fanaticism and a spirit of proselitism, which characterised the movement in the days of its youth, seem to be gone and sincere pathos to have cooled down. One does not hear much lately of Eurasianism. Its merit was, besides satisfying a passing state of feeling produced by the Russian Catastrophe, to present, under extraordinary conditions in a new light an old question which for about two centuries troubled the conscience of Russian intellectuals. In the meantime history seemed to decide it definitely. But history has its freaks; we are just passing through one of them. An appeal to the will of the coming generations is always possible. It is for the readers to decide whether it is convincing.

Ueber das Wesen der mathematischen Induktion.

Von Branislav Petronievics (Beograd).

Bekanntlich versteht man unter der mathematischen Induktion ein Schlußverfahren, welches aus folgenden drei Bestandteilen gebildet wird:

1. Aus dem Beweise, daß, wenn ein Satz für n Glieder (der endlosen Reihe endlicher Zahlen) gilt, derselbe auch für $n+1$ Glieder gilt;

2. Aus der Feststellung, daß der betreffende Satz für eine bestimmte Anzahl von Gliedern (für $n=1$, oder $n=2$ etc.) gültig ist; und

3. Aus der Schlußfolgerung, daß der Satz allgemein gilt.

Worin die drei Bestandteile im einzelnen bestehen, soll an folgendem Beispiele erhellen. Der Satz, daß die Anzahl der n ersten ungeraden Zahlen $=n^2$ ist, wird durch mathematische Induktion folgendermaßen bewiesen.

Setzen wir voraus, der Satz sei gültig für n Glieder, d. h. es sei $1+3+5+\ldots(2n-1)=n^2$. Dann ist er auch für $n+1$ Glieder gültig. Denn ist $1+3+5+\ldots(2n-1)=n^2$, dann ist auch $1+3+5+\ldots(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$, da $n^2+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$.

Nun ist $1+3=4=2^2$, der Satz ist also für $n=2$ gültig.

Ist er aber für $n=2$ gültig, dann muß er, nach dem soeben Bewiesenen, auch für $n=3$ gültig sein; wenn er aber für $n=3$ gültig ist, dann ist er auch für $n=4$ gültig u. s. f. in infinitum. Der Satz ist also allgemein gültig.

Worin besteht nun das Wesen dieses logischen Schlußverfahrens? Auf diese Frage sind im wesentlichen drei Antworten möglich.

Nach der ersten dieser drei Antworten läßt sich die mathematische Induktion auf einen einzigen hypothetischen Syllogismus zurückführen.

Nach der zweiten besteht sie aus einer unendlichen Reihe von hypothetischen Einzelsyllogismen, in denen eine und dieselbe allgemeine Praemisse als Obersatz wiederholt wird.

Nach der dritten aus einer unendlichen Reihe von aus partikulären Praemissen bestehenden hypothetischen Einzelsyllogismen.

Um den Unterschied zwischen diesen drei Interpretationen besser einsehen zu können, wollen wir denselben an dem Beispiel des Kommutationsgesetzes $a+b=b+a$ näher erläutern, welches durch mathematische Induktion folgendermaßen bewiesen wird.

Es wird zunächst der Satz $a+1=1+a$ als bewiesen und es werden die Sätze $a+b=b+a$ und $a+(b+1)=(a+b)+1$ für $b=n$ als gültig vorausgesetzt. Und es wird dann in folgender Weise bewiesen, daß $a+(n+1)=(n+1)+a$ ist.

Aus $a+n=n+a$ folgt unmittelbar, daß $(a+n)+1=(n+a)+1$ ist.

Da nun einerseits $(a+n)+1=a+(n+1)$, und anderseits $(n+a)+1=n+(a+1)=n+(1+a)=(n+1)+a$ ist, so ist $a+(n+1)=(n+1)+a$.

Da nun weiter, der Voraussetzung gemäß, $a+1=1+a$, so ist demnach auch $a+2=2+a$, $a+3=3+a$ etc., und somit allgemein $a+b=b+a$.

Nach der ersten Interpretation läßt sich das ganze Schlußverfahren der mathematischen Induktion in diesem besonderen Falle auf folgenden einfachen hypothetischen Syllogismus zurückführen:

Wenn $a+n=n+a$ ist, dann ist $a+(n+1)=(n+1)+a$

$$\frac{a+1=1+a}{a+b=b+a}$$

Nach der zweiten Interpretation besteht das Schlußverfahren der mathematischen Induktion in unserem Beispiel in der folgenden unendlichen Reihe von hypothetischen Einzelsyllogismen:

1.

Wenn $a+n=n+a$, dann ist $a+(n+1)=(n+1)+a$

$$\frac{a+1=1+a}{a+2=2+a}$$

2.

Wenn $a+n=n+a$, dann ist $a+(n+1)=(n+1)+a$

$$\frac{a+2=2+a}{a+3=3+a}$$

3.

Wenn $a+n=n+a$, dann ist $a+(n+1)=(n+1)+a$

$$\frac{a+3=3+a}{a+4=4+a}$$

etc. etc.

Es ist somit $a+b=b+a$.

Nach der dritten Interpretation dagegen ist die unendliche Reihe der in der mathematischen Induktion vorkommenden hypothetischen Einzelsyllogismen hier folgendermaßen gestaltet:

1.

Wenn $a+1=1+a$, dann ist $a+2=2+a$

$$\frac{a+1=1+a}{a+2=2+a}$$

2.

Wenn $a+2=2+a$, dann ist $a+3=3+a$

$$\frac{a+2=2+a}{a+3=3+a}$$

3.

Wenn $a+3=3+a$, dann ist $a+4=4+a$

$$\frac{a+3=3+a}{a+4=4+a}$$

etc. etc.

Es ist somit $a+b=b+a$.

Wie man sieht, die als Obersatz auftretende allgemeine Praemisse der zweiten Interpretation ist in der dritten durch die unendliche Reihe von partikulären Praemissen ersetzt, deren jede besonders bewiesen werden muß und besonders bewiesen werden kann[1]).

Die erste Interpretation wird im wesentlichen von der überwiegenden Mehrzahl der Logiker geteilt (vgl. z. B. G. Milhaud, Le Rationnel, 1898, ch. IV).

Die zweite wurde von H. Poincaré in seinem bekannten Aufsatze „Sur la nature du raisonnement mathématique" gegeben (dieser Aufsatz erschien zuerst in „Revue de Métaphysique et de Morale", 1894, und wurde dann, in gekürzter Gestalt, in Poincarés Werke „La Science et l'Hypothèse" wiederabgedruckt).

Die dritte Interpretation wurde unlängst von dem Verfasser dieses Beitrags formuliert in seinem Aufsatze „Les lois fondamentales de l'addition arithmétique et le principe de l'induction mathématique", der in „Revue générale des sciences pures et appliquées", 1924, veröffentlicht wurde. Und der Leser, der sich für die Frage der mathematischen Induktion näher interessiert, sei auf diesen Aufsatz verwiesen.

1) Daß $a+2=2+a$, wird folgendermaßen bewiesen. Ist $a+1=1+a$, dann ist $a+2=a+(1+1)=(a+1)+1=(1+a)+1=1+(a+1)=1+(1+a)=(1+1)+a=2+a$. Analog wird $a+3=3+a$ aus $a+2=2+a$ bewiesen, usw.

Die unendliche Reihe von Einzelsätzen

$$\begin{array}{c} a+1=1+a \\ a+2=2+a \\ a+3=3+a \\ \text{— — — —} \\ a+n=n+a \\ \text{— — — —} \end{array}$$

stellt somit eine Reihe dar, in der die Geltung jedes nachfolgenden Satzes von der Geltung des vorhergehenden abhängt.